Глава 1

Дифференциальные уравнения

1.1 Понятие о дифференциальном уравнении

1.1.1 Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

В классической физике каждой физической величине ставится в соответствие функция. Если физическая величина изменяется со временем, то уравнение, описывающее данный процесс, будет содержать как неизвестную величину (искомую функцию), так и скорость ее изменения (т. е. производную этой функции).

О п р е д е л е н и е 1. Дифференциальным уравнением называют уравнение, содержащее неизвестную функцию x аргумента $t \in \boldsymbol{R}$, ее производные и аргумент:

$$F(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n)}) = 0.$$

Если в уравнение входят независимая переменная, неизвестная функция и ее первая производная (но не входят старшие производные), то уравнение называется **дифференциальным уравнением первого порядка**:

$$F(t, x, x') = 0.$$

Если, кроме того, в уравнение входит производная второго порядка от искомой функции, то уравнение называется **дифференциальным уравнением второго порядка**:

$$F(t, x, x', x'') = 0.$$

Аналогично определяются дифференциальные уравнения третьего, четвертого и т. д. порядков.

О п р е д е л е н и е 2. Порядком дифференциального уравнения называют максимальный порядок производной, под знаком которой искомая функция входит в уравнение.

Рассмотрим задачу, приводящую к дифференциальному уравнению. По заданным силам требуется найти уравнение движения $x = x(t)$ материальной точки массой m (одна из основных задач классической механики). Для этого запишем второй закон Ньютона:

$$ma = F,$$

где a - ускорение, а F - равнодействующая сил, приложенных к точке. Так как ускорение есть вторая производная от координаты по времени $a = x''$, получаем дифференциальное уравнение второго порядка:

$$mx'' = F.$$

Проинтегрировав это уравнение по t два раза, получим закон движения $x = x(t)$.

1.1.2 Общее решение дифференциального уравнения.

В общем случае дифференциальное уравнение первого порядка можно записать в виде:

$$F(t, x, x') = 0, \tag{1.1}$$

где $x = x(t)$ - искомая функция, $x' = x'(t) = \frac{dx}{dt}$ - ее производная по независимой переменной t, а F - заданная функция трех переменных t, x, x'. Обычно дифференциальное уравнение (1.1) стараются привести к виду

$$x' = f(t, x). \tag{1.2}$$

Такие уравнения называются **разрешенными относительно производной**.

О п р е д е л е н и е 1. **Решением дифференциального уравнения** (1.2) называют функцию $x = \varphi(t), \quad t \in (a; b)$, если она имеет производную $\varphi'(t)$ на интервале $(a; b)$ и если для любого $t \in (a; b)$ справедливо равенство

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)).$$

Т. е., при подстановке в уравнение, обращает его в тождество.

Если функция f, стоящая в правой части уравнения (1.2), зависит только от переменной t, получается простейшее дифференциальное уравнение первого порядка

$$x' = f(t), \tag{1.3}$$

где $f(t)$ — заданная функция, а $x(t)$ — искомая функция. В этом случае задача отыскания решения такого уравнения сводится к нахождению первообразных заданной функции $f(t)$, т. е. интегрированию его правой части. Таким образом, решение простейшего дифференциального уравнения (1.3) имеет вид

$$x(t) = \int f(t)dt.$$

Это решение содержит неявно произвольную постоянную C. Действительно, если $F(t)$ - некоторая первообразная функции $f(t)$, то $\int f(t)dt = F(t) + C$, поэтому

$$x(t) = F(t) + C.$$

Следовательно, простейшее дифференциальное уравнение первого порядка (1.3) имеет имеет бесконечное множество решений.

О п р е д е л е н и е 2. Функция $x = \varphi(t, C)$, которая при каждом фиксированном значении C как функция от t является решением уравнения (1.3), называется **общим решением** этого дифференциального уравнения.

П р и м е р. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$x' = 3\cos t - \frac{2}{1+t}.$$

Общее решение $x(t)$ данного дифференциального уравнения записывается в виде неопределенного интеграла от функций, стоящих в правой части этого уравнения:

$$\begin{aligned} x = \int \left(3\cos t - \frac{2}{1+t}\right) dt = 3\int \cos t dt - 2\int \frac{2}{1+t} = \\ = \quad 3\sin t - 2\ln|1+t| + C. \end{aligned}$$

1.1.3 Начальные условия и задача Коши.

Общее решение дифференциального уравнения представляет собой совокупность бесконечного числа решений. Напомним, что прибавление к заданной функции любого числа C приводит к сдвигу ее графика по оси Oy. Следовательно, если вы находите уравнение движения, то общее решение будет иметь смысл пучка возможных траекторий тела. Задавая какое-либо значение произвольной постоянной C (например, начальную координату тела), можно из всех возможных траекторий выделить одну, по которой и будет двигаться тело. Каждое решение дифференциального уравнения, которое получается из общего решения при конкретном значении произвольной постоянной C, называется **частным решением**.

Обычно для выделения единственного решения их общего решения дифференциального уравнения используют дополнительное условие

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.4}$$

где t_0 и x_0 — заданные числа. Условие (1.4) называется **начальным условием**.

О п р е д е л е н и е. Задача нахождения решения дифференциального уравнения $x' = f(t, x)$, удовлетворяющего начальному условию (1.4), называется **задачей Коши**.

Справедлива следующая теорема, которую мы приведем без доказательства.

Т е о р е м а. *Если функции* $f(t, x)$ и $\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}$ *непрерывны в окрестности точки* $M_0(t_0; x_0)$, *то задача Коши*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

в некоторой окрестности точки $M_0(t_0; x_0)$ *имеет единственное решение.*

П р и м е р. Найдите решение задачи Коши:

$$x' = \sin 5t, \quad x(\pi) = 1.$$

Найдем общее решение дифференциального уравнения, содержащее произвольную постоянную C:

$$x(t) = \int \sin(5t)dt = -\frac{1}{5}\cos(5t) + C. \tag{1.5}$$

Теперь найдем единственное значение произвольной постоянной C, удовлетворяющее начальному условию (выделим из общего решения частное, удовлетворяющее начальному условию). Для этого положим в равенстве (1.5) $t = \pi$ и используем начальное условие:

$$x(\pi) = -\frac{1}{5}\cos(5\pi) + C = 1.$$

Так как $\cos(5\pi) = -1$, то $C = \frac{4}{5}$. Итак, решением задачи Коши (частным решением, удовлетворяющим данному начальному условию) является функция $x(\pi) = -\frac{1}{5}\cos(5\pi) + \frac{4}{5}$.

1.2 Методы решения некоторых дифференциальных уравнений первого порядка

1.2.1 Уравнение с разделяющимися переменными.

Если правую часть дифференциального уравнения первого порядка

$$x'(t) = f(t, x)$$

можно представить в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от переменной t, а другая только от x, то уравнение принимает вид:

$$x'(t) = f_1(t)f_2(x). \tag{1.6}$$

Дифференциальное уравнение (1.6) называется **уравнением с разделяющимися переменными**.

Запишем производную $x'(t)$ в виде $\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t)f_2(x). \tag{1.7}$$

Умножив на dt и разделив на $f_2(x)$ обе части уравнения (1.7), получим:

$$\frac{dx}{f_2(x)} = f_1(t)dt. \tag{1.8}$$

Переменная x входит только в левую часть уравнения (1.8), а переменная t — только в правую. Поэтому говорят, что уравнение (1.8) решается методом **методом разделения переменных**. Функции равны, следовательно будут равны и интегралы от них:

$$\int \frac{dx}{f_2(x)} = \int f_1(t)dt. \tag{1.9}$$

В формуле (1.9) неявным образом содержится произвольная постоянная C (постоянная интегрирования). Таким образом, формула (1.9) дает общее решение уравнения (1.6). Эта формула получена в предположении, что $f_2(x) \neq 0$. Если же существует значение $x = x_0$, при котором $f_2(x_0) = 0$, то, помимо решения (1.9), дифференциальное уравнение (1.6) будет иметь еще одно решение:

$$x(t) = x_0. \tag{1.10}$$

Проинтегрировав обе части равенства (1.9), т. е. найдя некоторую первообразную $F_2(x)$ для функции $\frac{1}{f_2(x)}$ и $F_1(t)$ для функции $f_1(t)$, получим уравнение

$$F_2(x) = F_1(t) + C, \tag{1.11}$$

где C — произвольная постоянная. Решив — если это возможно — уравнение (1.11) относительно t, найдем общее решение в виде

$$x(t) = \varphi(t, C).$$

Если же этого сделать нельзя, то говорят, что уравнение (1.11) задает общее решение неявно.

П р и м е р 1. Решить уравнение

$$x'(t) - xt^4 = 0. \tag{1.12}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Приведем уравнение к виду:

$$\frac{dx}{dt} = xt^4.$$

Разделив переменные:

$$\frac{dx}{x} = t^4dt$$

и проинтегрировав, получим

$$\ln|x| = \frac{1}{5}t^5 + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная. Отсюда следует, что

$$|x| = e^{\frac{1}{5}t^5 + C_1} = e^{C_1}e^{\frac{1}{5}t^5},$$

или

$$x = (\pm e^{C_1})e^{\frac{1}{5}t^5}.$$

Полагая $\pm e^{C_1} = C_2$ (постоянная C_2 может принимать любые действительные значения, т. е. $C_2 \in \boldsymbol{R}$), находим общее решение уравнения (1.12):

$$x = C_2e^{\frac{1}{5}t^5}. \tag{1.13}$$

Левая часть уравнения (1.12) обращается в нуль при $x = 0$. Поэтому $x(t) = 0$ является решением данного дифференциального уравнения. Это решение получается из формулы (1.13) при $C_2 = 0$, т. е. формула (1.13) задает все решения уравнения (1.12).

П р и м е р 2. Найдите все решения дифференциального уравнения

$$x' = tx^2.$$

Очевидно, что $x = 0$ является решением данного уравнения. Рассмотрим случай $x \neq 0$. Разделим переменные:

$$\frac{dx}{x^2} = tdt.$$

Следовательно

$$-\frac{1}{x} = \frac{1}{2}t^2 + C_1.$$

Введя новую постоянную $C = 2C_1$, находим общее решение данного дифференциального уравнения:

$$x = -\frac{2}{t^2 + C},$$

где C — произвольная постоянная. Заметим, что решение $x = 0$ не получается из общего решения ни при каком значении постоянной C. Такое решение называется **особым**.

П р и м е р 3. Решить уравнение

$$x' = \frac{xt \sin t}{1 + x}.$$

Очевидно, что постоянная функция $x = 0$ является решением данного уравнения. Пусть теперь $x \neq 0$. Разделим переменные:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = t \sin t dt.$$

Проинтегрируем левую часть этого уравнения по x:

$$\int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \int dx + \int \frac{dx}{x} = x + \ln|x| + C_1,$$

а правую по t:

$$\int t \sin t dt = -\int t d(\cos t) = -t \cos t + \int \cos t dt =$$
$$= -t \cos t + \sin t + C_2.$$

В результате получим уравнение

$$x + \ln|x| = -t \cos t + \sin t + C, \tag{1.14}$$

где $C = C_2 - C_1$ — произвольная постоянная. Формула (1.14) задает общее решение в неявном виде. Чтобы найти общее решение данного дифференциального уравнения в явном виде ($x = \varphi(t, C)$), нужно решить уравнение (1.14) относительно x. Это сделать невозможно, так как решение не выражается через элементарные функции. Однако нахождение решения дифференциального уравнения уже сведено к решению уравнения, не содержащего производных.

П р и м е р 4. Решить уравнение

$$x' = x \frac{\sin t}{t}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\ln|x| = \int \frac{\sin t}{t} dt + C_1.$$

Интеграл, стоящий в правой части является "неберущимся т. е. он не выражается через элементарные функции. В результате имеем:

$$x(t) = Ce^{\int \frac{\sin t}{t} dt},$$

где $C = \pm e^{C_1}$ — произвольная постоянная.

1.2.2 Однородное уравнение.

Функция $f(x,t)$ называется **однородной**, если для любого числа μ справедливо тождество

$$f(\mu x, \mu t) = \mu^\alpha f(x,t),$$

где α — некоторое число, называемое **показателем** однородной функции.

П р и м е р 1. Показать, что функции

$$f_1(t,x) = \sqrt[3]{t^3 + x^3}, \quad f_2(t,x) = tx - x^2, \quad f_3(t,x) = \frac{t^2 + x^2}{tx}$$

являются однородными и найти их показатели.

Последовательно имеем:

$$f_1(\mu t, \mu x) = \sqrt[3]{(\mu t)^3 + (\mu x)^3} = \mu\sqrt[3]{t^3 + x^3} = \mu f_1(t,x),$$
$$f_2(\mu t, \mu x) = (\mu t)(\mu x) - (\mu x)^2 = \mu^2 f_2(t,x),$$
$$f_3(\mu t, \mu x) = \frac{(\mu t)^2 + (\mu x)^2}{\mu t \mu x} = \frac{t^2 + x^2}{tx} = \mu^0 f_3(t,x).$$

Таким образом, все три функции являются однородными: для первой показатель $\alpha = 1$, для второй $\alpha = 2$, для третьей $\alpha = 0$.

О п р е д е л е н и е. Дифференциальное уравнение

$$x' = f(t,x), \tag{1.15}$$

называется **однородным**, если функция $f(t,x)$ является однородной функцией с нулевым показателем (т. е. $\alpha = 0$).

Для того, чтобы решить однородное уравнение (1.15) делают замену неизвестной функции $x(t)$ на функцию $v(t)$ по формуле

$$x(t) = tv(t). \tag{1.16}$$

Так как функция $f(t,x)$ однородной с нулевым показателем, то

$$f(t,x) = f(t,tv) = t^0 f(1,v) = f(1,v). \tag{1.17}$$

Дифференцируя равенство (1.16), получим

$$x' = v + tv'. \tag{1.18}$$

Подставляя выражения (1.17) и (1.18) в исходное уравнение (1.15), находим, что новая неизвестная функция $v = v(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$tv' = f(1,v) - v.$$

В результате мы получили уравнение с разделяющимися переменными, способ решения которого нам уже известен.

П р и м е р 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x' = \frac{t^2 + x^2}{tx}.$$

В примере 1 было показано, что функция $f(t,x) = \frac{t^2+x^2}{tx}$ является однородной функцией с нулевым показателем. Следовательно решение данного дифференциального уравнения будем искать в виде $x = tv$. Тогда получим

$$v + tv' = \frac{t^2 + t^2v^2}{t^2v}, \quad \text{или} \quad tv' = \frac{t^2 + t^2v^2}{t^2v} - v, \quad \text{или} \quad tv' = \frac{1}{v}.$$

Разделяя в последнем уравнении переменные и интегрируя, находим

$$\frac{1}{2}v^2 = \ln|t| + C.$$

Отсюда $v = \pm\sqrt{2(\ln|t| + C)}$ и окончательно имеем

$$x(t) = tv(t) = \pm t\sqrt{2(\ln|t| + C)}.$$

1.2.3 Линейное уравнение.

Дифференциальное уравнение
$$x' + a(t)x = f(t), \tag{1.19}$$
где $a(t), f(t)$ — известные функции, называется **линейным дифференциальным уравнением первого порядка**.

Если правая часть уравнения (1.19) равна нулю ($f(t) \equiv 0$), то оно называется линейным **однородным** дифференциальным уравнением первого порядка. Такое уравнение решают разделяя переменные. Если правая часть уравнения (1.19) не равна нулю ($f(t) \neq 0$), то оно называется линейным **неоднородным** дифференциальным уравнением первого порядка. Решение такого уравнения будем искать в виде произведения двух функций:
$$x = uv, \tag{1.20}$$
где u — некоторое ненулевое частное решение уравнения с разделяющимися переменными (однородного уравнения, соответствующего уравнению (1.19))
$$u' + a(t) = 0, \tag{1.21}$$
а v — новая неизвестная функция. Подставляя выражение (1.20) в дифференциальное уравнение (1.19), получим
$$\big[u' + a(t)\big]v + uv' = f(t).$$
Тогда из равенства (1.21) следует, что неизвестная функция $v(t)$ должна удовлетворять уравнению
$$uv' = f(t). \tag{1.22}$$
Это уравнение также является уравнением с разделяющимися переменными. Т. о., для нажождения общего решения уравнения (1.19), последовательно находим u и v из уравнений (1.21) и (1.22), причем в качестве u выбираем какое-нибудь конкретное частное решение, отличное от нуля.

П р и м е р 1. Найти общее решение дифференциального уравнения
$$x' + 2tx = 2t.$$

Так как данное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка, его решение следует искать в виде $x(t) = u(t)v(t)$, где $u(t)$ — некоторое частное решение уравнения с разделяющимися переменными
$$u' + 2tu = 0. \tag{1.23}$$
Подставим выражение $x = uv$ в исходное уравнение:
$$\big[u' + 2tu\big]v + uv' = 2t.$$
С учетом равенства (1.23) получим уравнение для функции v:
$$uv' = 2t. \tag{1.24}$$

В уравнении (1.23) разделяем переменные и интегрируем:
$$\int \frac{du}{u} = -2\int t dt.$$
Последовательно имеем
$$\ln|u| = -\,t^2 + c_1,$$
$$u = C_2 e^{-t^2},$$
где $C_2 = e^{C_1}$. Выберем для простоты $C_2 = 1$. Тогда уравнение (1.24) примет вид простейшего дифференциального уравнения
$$e^{-t^2}v' = 2t.$$

Умножив обе части уравнения на e^{t^2} и интегрируя, получим

$$v = e^{t^2} + C_3.$$

Окончательно имеем

$$x = uv = e^{-t^2}\left(e^{t^2} + C_3\right) = C_3 e^{-t^2} + 1.$$

П р и м е р 2. Найдите решение задачи Коши:

$$(t+1)x' - 2x = (t+1)^4, \quad x(0) = 2.$$

Данное дифференциальное уравнение является линейным неоднородным. Следовательно, его решение ищем в виде $x(t) = u(t)v(t)$. Уравнение для функции $u(t)$ имеет вид:

$$u' - \frac{2u}{t+1} = 0.$$

Откуда $u(t) = C_1(t+1)$. Положив $C_1 = 1$, получим уравнение для функции $v(t)$:

$$(t+1)^2 v' = (t+1)^3,$$

откуда $v(t) = \frac{t^2}{2} + t + C_2$, где C_2 — произвольная постоянная. Окончательно находим:

$$x(t) = uv = (t+1)^2\left[\frac{t^2}{2} + t + C_2\right].$$

Теперь найдем единственное значение постоянной C_2, удовлетворяющее начальному условию. Для этого в последнем равенстве положим $t = 0$ и используем начальное условие:

$$x(0) = (0+1)^2\left[\frac{0^2}{2} + 0 + C_2\right] = 2.$$

Откуда $C_2 = 2$. Итак, решением задачи Коши является функция

$$x(t) = (t+1)^2\left[\frac{t^2}{2} + t + 2\right].$$

1.3 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

1.3.1 Задача Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка.

Дифференциальное уравнение

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = f(t), \tag{1.25}$$

где $a(t), b(t), f(t)$ — известные функции, называется **линейным дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами**. Общей теории решения таких уравнений не существует. Метод решения будет зависеть от того, какой вид имеют функции $a(t), b(t), f(t)$. Поэтому мы ограничемся важным для практических приложений случаем **линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами**:

$$x'' + ax' + bx = f(t), \tag{1.26}$$

где a и b — постоянные величины. Если $f(t) \neq 0$, то уравнение (1.26) называют **линейным неоднородным уравнением второго порядка**. Если же $f(t) = 0$ для всех рассматриваемых t, то уравнение (1.26) примет вид

$$x'' + ax' + bx = 0$$

и называется **линейным однородным уравнением второго порядка**.

Рассмотрим задачу, приводящую линейному дифференциальному уравнению второго порядка.

П р и м е р 1. Найти закон движения ($x = x(t)$) материальной точки массы m под действием постоянной силы F.

Пусть, для простоты, материальная точка движется вдоль оси Ox. Для данного случая, второй закон Ньютона имеет вид:

$$mx'' = F, \tag{1.27}$$

или

$$x'' = \frac{F}{m}.$$

Учитывая, то $x'' = \frac{d(x')}{dt}$, разделим переменные и проинтегрируем обе части этого уравнения по t:

$$\int (dx') = \int \frac{F}{m} dt.$$

В результате имеем:

$$x' = \frac{F}{m} t + C_1.$$

Получили простейшее дифференциальное уравнение. Интегрируя, находим

$$x(t) = \frac{F}{m} \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Введем обозначения $C_2 = x_0, \quad C_1 = v_0, \quad \frac{F}{m} = a$. Тогда решение уравнения (1.27) запишется в виде

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

где x_0 — начальная координата, v_0 — начальное скорость и a — ускорение (известная из школьного курса физики формула — зависимость координаты от времени при равноускоренном движении).

Из рассмотренного примера можно сделать ряд выводов:

1) решение дифференциального уравнения второго порядка представляет собой сумму двух частей: часть решения, зависящая от двух произвольных постоянных C_1 и C_2, т. е. функция $C_1 t + C_2$ является решением однородного уравнения $x''(t) = 0$, соответствующего исходному неоднородному уравнению, а вторая часть произвольных постоянных не содержит и является некоторым частным решением неоднородного уравнения;

2) решение зависит от двух произвольных постоянных. Такое решение называют **общим решением** дифференциального уравнения второго порядка.

Отметим, что эти выводы оказываются справедливы и для общего уравнения (1.26). Прежде чем сформулировать соответствующую теорему, дадим определение линейно зависимых и линейно независимых функций.

О п р е д е л е н и е. Две функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ называются **линейно зависимыми**, если существуют не равные одновременно нулю числа λ_1 и λ_2 такие, что справедливо тождество

$$\lambda_1 \varphi_1(t) + \lambda_2 \varphi_2(t) = 0. \tag{1.28}$$

В противном случае, если такие числа подобрать нельзя, функции называются **линейно независимыми**. Иными словами, если функции φ_1 и φ_2 линейно независимы и имеет место тождество (1.28), то $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Очевидно, что функции φ_1 и φ_2 линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны друг другу.

Например, можно показать, что функции $\varphi_1(t) = e^{k_1 t}$ и $\varphi_2(t) = e^{k_2 t}$ при $k_1 \neq k_2$ линейно независимы. Предположим противное, т. е. что имеет место тождество

$$\lambda_1 e^{k_1 t} + \lambda_2 e^{k_2 t} = 0,$$

где хотя бы один из коэффициентов, например λ_2, не равен нулю. Тогда получим тождество

$$e^{(k_2-k_1)t} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

что невозможно, так как левая часть этого равенства изменяется с изменением t, а правая часть постоянна.

Т е о р е м а. *Пусть φ_1 и φ_2 — два линейно независимых решения однородного дифференциального уравнения, соответствующего неоднородному уравнению* (1.26). *Тогда общее решение уравнения* (1.26) *равно сумме общего решения $x_0 = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t)$ соответствующего однородного уравнения и частного решения $x_1(t)$ неоднородного уравнения* (1.26), *т. е.*

$$x(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + x_1(t).$$

Итак, для отыскания общего решения уравнения (1.26) нужно сначала найти общее решение $x_0 = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t)$ соответствующего однородного уравнения, а затем некоторое частное решение неоднородного уравнения. Таким образом, всего требуется найти три частных решения: два разныз (линейно независимых) частных решения φ_1 и φ_2 однородного уравнения и одно частное решение $x_1(t)$ неоднородного уравнения.

Заметим, что для выделения единственного решения дифференциального уравнения второго порядка необходимо использовать два начальных условия

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = v_0. \tag{1.29}$$

В случае, когда дифференциальное уравнение второго порядка описывает механическое движение, начальные условия x_0 и v_0 будут иметь смысл начальной координаты и начальной скорости соответственно.

Задача отыскания решения уравнения (1.26), удовлетворяющего начальным условиям (1.29), называется **задачей Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка**.

1.3.2 Нахождение общего решения линейного однородного уравнения.

Рассмотрим линейное однородное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $x = x(t)$:

$$x'' + ax' + bx = 0. \tag{1.30}$$

Можно показать, что общим решением такого уравнения является функция

$$x(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}, \tag{1.31}$$

где λ_1 и λ_2 — корни алгебраического уравнения

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{1.32}$$

Квадратное уравнение (1.32) называется **характеристическим уравнением** дифференциального уравнения (1.30).

П р и м е р 1. Найти общее решение однородного уравнения

$$x'' + 2x' - 3x = 0.$$

Составим характеристическое уравнение. Для этого в исходное уравнение вместо функции x подставим переменную λ в степени, соответствующей порядку производной, под знаком которой содержится функция x:

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0.$$

Находим его корни:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -3.$$

Получили два различных действительных корня ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Тогда общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-3t}.$$

П р и м е р 2. Найдите решение задачи Коши

$$x'' + x' - 2x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$$

Сначала найдем общее решение этого дифференциального уравнения. Для этого составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Находим его корни: $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2$. Общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}.$$

Для отыскания частного решения найдем C_1 и C_2, используя начальные условия. Так как $x'(t) = C_1 e^t - 2C_2 e^{-2t}$, то

$$\begin{cases} x(0) = & C_1 + C_2 = 1, \\ x'(0) = & C_1 - 2C_2 = 2, \end{cases}$$

откуда $C_1 = \frac{4}{3}$ и $C_1 = -\frac{1}{3}$. Итак, искомое решение задачи Коши имеет вид

$$x(t) = \frac{4}{3}\, e^t - \frac{1}{3}\, e^{-2t}.$$

Если дискриминант характеристического уравнения равен нулю ($D = a^2 - 4b = 0$), то уравнение имеет кратный корень $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{a}{2}$ и мы уже не располагаем двумя линейно независимыми функциями, требующимися для построения общего решения. Можно показать, что вторым, недостающим недостающим частным решением уравнения (1.30) в этом случае является функция $\varphi_2(t) = te^{\lambda t}$, где $\lambda = -\frac{a}{2}$.

Таким образом, общим решением линейного однородного уравнения (1.30) в случае кратного корня λ характеристического уравнения является функция

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 t e^{-2t}, \tag{1.33}$$

где $\lambda = -\frac{a}{2}$.

П р и м е р 3. Найдите общее решение уравнения

$$x'' - 6x' + 9x = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$$

имеет один кратный корень $\lambda = 3$. Тогда, согласно формуле (1.33), общее решение данного дифференциального уравнения записывается в виде

$$x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}.$$

Осталось рассмотреть случай, когда дискриминант отрицателен, т. е. $D = a^2 - 4b < 0$. Тогда характеристическое уравнение будет иметь два комплексно сопряженных корня: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ и $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения будет иметь вид

$$x(t) = C_3 e^{(\alpha + i\beta)t} + C_4 e^{(\alpha - i\beta)t}, \tag{1.34}$$

где C_3 и C_4 — произвольные комплексные постоянные. Так как нас интересуют лишь действительные решения (в физическом эксперименте можно измерить только действительные значения), то мы должны из всего множества комплексных решений (1.34) выделить подмножество, соответствующее действительным решениям. Для этого воспользуемся формулой Эйлера:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \tag{1.35}$$

где y — действительное число, а i — мнимая единица. Используя формулу (1.35), можно привести общее комплексное решение (1.34) к виду

$$x(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t), \tag{1.36}$$

где C_1 и C_2 — произвольные действительные постоянные.

П р и м е р 4. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$x'' + 4x' + 13x = 0.$$

Запишем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0.$$

Оно имеет два комплексно сопряженных корня: $\lambda_1 = -2 + 3i$ и $\lambda_2 = \lambda_1^* = -2 - 3i$. По формуле (1.36), в которой $\alpha = -2$ и $\beta = 3$, найдем общее решение

$$x(t) = C_1 e^{-2t} \cos(3t) + C_2 e^{-2t} \sin(3t).$$

1.3.3 Частное решение линейного неоднородного уравнения в случае квазимногочленов.

Для нахождения общего решения линейного неоднородного уравнения

$$x'' + ax' + bx = f(t). \tag{1.37}$$

нужно найти общее решение соответствующего однородного уравнения

$$x'' + ax' + bx = 0. \tag{1.38}$$

и одно частное решение неоднородного уравнения (1.37).

Ограничимся важным для практических приложений случаем, когда функция $f(t)$ является квазимногочленом:

$$f(t) = P_m(t) e^{\gamma t}, \tag{1.39}$$

т. е. произведением некоторого заданного многочлена порядка m на экспоненту с комплексной в общем случае постоянной γ.

Тогда, для нахождения частного решения $x_1(t)$ уравнения (1.37), зависящего от корней соответствующего характеристического уравнения, необходимо следовать правилу:

1) если γ не совпадает ни с одним из двух различных корней $\lambda_1,\ \lambda_2$ характеристического уравнения, то решение ищут в виде квазимногочлена такого же порядка m с неизвестными коэффициентами

$$x_1(t) = Q_m(t) e^{\gamma t}; \tag{1.40}$$

2) если γ совпадает с одним из двух различных корней $\lambda_1,\ \lambda_2$ характеристического уравнения, то

$$x_1(t) = t Q_m(t) e^{\gamma t}; \tag{1.41}$$

3) если γ совпадает с кратным корнем $\lambda_1,\ \lambda_2$ характеристического уравнения, то

$$x_1(t) = t^2 Q_m(t) e^{\gamma t}. \tag{1.42}$$

П р и м е р 1. Найдите общее решение уравнения

$$x'' + 9x = 9.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 9 = 0$ имеет чисто мнимые корни $\lambda_1 = 3i,\ \lambda_2 = -3i$. Общее решение однородного уравнения есть $x_0(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t$. Так как правая часть данного неоднородного дифференциального уравния представляет собой квазимногочлен нулевого порядка $P_0(t)e^{0\cdot t} = 9 \cdot e^{0\cdot t}$ и $\gamma \neq \lambda_1, \lambda_2$, то частное решение ищем в виде (1.40), т. е. в виде некоторого многочлена нулевой степени:

$$x_1(t) = Q_0(t) = A_0,$$

где A_0 — неизвестный коэффициент. Подставим это решение в исходное уравнение:

$$9A_0 = 9.$$

Отсюда находим $A_0 = 1$. таким образом, общее решение данного уравнения имеет вид

$$x(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t + 1.$$

П р и м е р 2. Найдите общее решение уравнения

$$x'' + 2x' - 3x = 6t.$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$x_0(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{t}.$$

Так как $\gamma = 0 \neq \lambda_1, \lambda_2$, то частное решение ищем в виде (1.40), т. е. в виде некоторого многочлена первой степени:

$$x_1(t) = Q_1(t) = A_0 t + A_1,$$

где A_0 и A_1 — неизвестные коэффициенты. Подставив эту функцию в исходное уравнение, получим

$$-3A_0 t + 2A_0 - 3A_1 = 6t.$$

Если для любого t два многочлена равны, то должны быть равны коэффициенты при одинаковых степенях t:

$$\begin{cases} -3A_0 = & 6, \\ 2A_0 - 3A_1 = & 0, \end{cases}$$

откуда $A_0 = -2,\ A_1 - \frac{4}{3}$. Итак, искомое общее решение имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{t} - 2t - \frac{4}{3}.$$

П р и м е р 3. Найдите общее решение уравнения

$$x'' - 4x = 5e^{-2t}.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$. Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$x_0(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}.$$

Так как правая часть данного уравнения $5e^{-2t} = P_0(t)e^{\gamma t}$, причем $\gamma = -2 = \lambda_2$, то частное решение ищем в виде (1.41), т. е. в виде произведения t на многочлен нулеввой степени и на экспоненту:

$$x_1(t) = tQ_0(t)e^{-2t} = A_0 t e^{-2t},$$

где A_0 — неизвестный коэффициент. Подставив эту функцию в исходное уравнение, получим

$$-4A_0 e^{-2t} + 4A_0 t e^{-2t} - 4A_0 t e^{-2t} = 5e^{-2t},$$

откуда $A_0 = -\frac{5}{4}$. Таким образом, искомое решение есть

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} - \frac{5}{4} t e^{-2t}.$$

П р и м е р 4. Найдите общее решение уравнения

$$x'' - 3x' + 2x = \sin t.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$. Поэтому общее решение однородного уравнения запишется так:

$$x_0(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^t.$$

Рассмотрим уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = e^{it}. \tag{1.43}$$

Частное решение этого уравнения будем искать в виде

$$y(t) = u(t) + iv(t). \tag{1.44}$$

Подставим решение (1.44) в уравнение (1.43) и воспользуемся формулой Эйлера. В результате имеем:

$$(u + iv)'' - 3(u + v)' + 2(u + v) = \cos t + i \sin t.$$

Откуда

$$v'' - 3v' + 2v = \sin t.$$

Таким образом, мнимая часть решения (1.44) удовлетворяет исходному уравнению.

Так как $\gamma = i \neq \lambda_1, \lambda_2$, частное решение уравнения (1.43) будем искать в виде

$$y_1(t) = A_0 e^{it}.$$

Подставив эту функцию в уравнение (1.43), получим

$$-A_0 e^{it} - 3iA_0 e^{it} + 2A_0 e^{it} = e^{it}, \quad \text{или} \quad A_0(1 - 3i) = 1.$$

Откуда $A_0 = \frac{1+3i}{10}$. Таким образом

$$\begin{aligned} y_1(t) =& \frac{1+3i}{10} e^{it} = \frac{1+3i}{10}(\cos t + i \sin t) = \\ =& \frac{1}{10}\cos t - \frac{3}{10}\sin t + i\left(\frac{1}{10}\sin t + \frac{3}{10}\cos t\right). \end{aligned}$$

Мнимая часть этой функции является частным решением заданного дифференциального уравнения. Тогда искомое общее решение имеет вид:

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^t + \frac{1}{10}\sin t + \frac{3}{10}\cos t.$$